Title	Normed Ring ニ就イテ I
Author(s)	近藤, 基吉
Citation	全国紙上数学談話会. 249 p.76-p.93
Issue Date	1943-02-11
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75033
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

1101. Normed ring ニ就イテ I

近藤基吉

近来 normed ring ノ理論デハ I. Gelfand commutative normed ring ノ論文ヤ J. v. Neumann - F. J. Murray ノ ring of operators ノ論文等ガ出テ居ルガ、此等ノ結果ノ中デ一体ドレダケノモノガ一般ノ normed ring デ成立ツデアラウカ。又，既ニ抽象代數學デ得ラレテ居ル環ニ關スル結果ノ中デ，ドレダケノモノヲ一般ノ normed ring ニ擴ゲウルデアラウカ．コノヤウナ問ハ十分知ラレテ居ルコトカモ知レナイガ、一應シラベテオクコトガ此ノ方面ノ研究ヲナス上ニ大事デハナイカト思フ。其ノヤウナ意味デコノ方面ノ結果ヲ少シ調ベテ居ルガ，判ッタコトヲ書イテ見タイト思フ．コレハ發表スルホドノ事デナイカモ知レナイガ、結果ヲマトメルタメニ書ク次第デアル。

今回ハ normed ring ニ關係スル各種ノ概念デ基本的ト思ハレルモノヲ列ベルコトニシタ。此処デ上ゲタ他ニモ各種ノ基本的概念ガアルガ、夫ヲ準備ヲ要スルノデ必要ニ應ジテアタヘテ行クコトニスル。

§1. 定義

先ヅ *normed ring* ノ定義ヲ與ヘテ置カウ. 集合 R ガ條件

1° R ハ加群デアル.

2° R ノ任意ノ二ツノ要素 A, B ニ對シテ其ノ積 AB ハ再ビ R ニ屬シ, 次ノ性質ヲ有スル。

(α) $(AB)C = A(BC)$

(β) $(A+B)C = AC+BC$,

$C(A+B) = CA+CB$.

3° R ノ任意ノ要素 A ト任意ノ複素數 α トノ積 αA ハ又 R ニ屬シ, 次ノ性質ヲ有スル。

(α) $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$,

$\alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B$.

(β) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, $(\alpha A)(\beta B) = \alpha\beta AB$

(γ) $1A = A$, $0A = 0$

4° R ノ各要素 A ニハ其ノ絶對値 —— $|A|$ デ示ス —— ト呼バレル實數ガ對應シ, 次ノ性質ヲ有スル。

(α) $|A| \geqq 0$, シカモ $A=0$ ノトキニ限ッテ $|A|=0$ デアル。

(β) $|A+B| \leqq |A| + |B|$

(γ) $|AB| \leqq |A||B|$

ヲ満スモノヲ normed ring ト云フ。

R ハ複素数ヲ係数域トスル環デアルカラ、環ニ関スル各種ノ概念ヲ R ノ上ニ導入スルコトガ出来ル．然シ，夫レ等ハ省イテ特ニ絶對値ニ關係スルモノヲ此処デ述ベテ置ク。

R ノ要素 E デ條件『R ノ各要素 A ニ對シテ $AE=EA=A$ デアル』ヲ満足スルモノガアレバ，ソレハ唯一ツデアル．コレヲ R ノ代數的單位要素ト云フ。コノトキニハ $|E|=|E^2|\leqq|E||E|$ ヨリ $|E|\geqq 1$ デアルガ、特ニ $|E|=1$ デアレバ，E ヲ R ノ單位要素ト呼ブコトニスル．R ニ單位要素ノ存在シナイトキニハ R ニ新ラシイ要素 E ヲ添加シテ得ラレル環 $R|E|$ ガ再ビ normed ring デシカモ E ガ其ノ單位要素デアルヤウニ出来ル．夫レニハ E ヲ與ヘテ

$$1^\circ \quad AE=EA=A \, (A\in R), \qquad E^2=E$$

$$2^\circ \quad |\alpha E+A| = |\alpha|+|A|$$

トスレバ十分デアル。又，R ノ要素 E_r，E_l デ條件『R ノ各要素 A ニ對シテ $AE_r = E_l A = A$ デアル』ヲ満スモノガ存在スレバ，夫レ等ヲ夫々 R ノ右及ビ左ノ代數的單位要素トイフ．一般ニハ $|E_r|$，$|E_l|\geqq 1$ デアルガ，特ニ 1 ニ等シイトキニ夫レ等ヲ R ノ右及ビ左ノ單位要素ト呼ブ。

次ニ, Rガ（代数的）単位要素Eヲ含ム場合ヲ考ヘル. Rノ要素Aニ對シテ

$$A A_r^{-1} = A_l^{-1} A = E$$

ヲ満足スルA_r^{-1}, A_l^{-1}ガ存在スレバ, コレ等ヲソレゾレAノ右及ビ左ノ（代数的）逆要素ト呼ビ, 更ニコレ等ガ互ニ相等シイトキニ夫レヲAノ（代数的）逆要素ト名付ケA^{-1}デ示ス。又, Rノ要素デ（代数的）逆要素ノ存在スルモノヲRノ（代数的）正則要素ト呼ブ. 更ニRノ要素Aデ

$$|A| = |A^{-1}| = 1$$

ヲ満スモノヲRノ単位的要素ト名付ケヨウ。

次ニ, Rノ任意ノ二ツノ要素A, Bニ對シテ

$$dis\,(A, B) = |A - B|$$

トスレバ, $dis\,(A, B)$ニ関シテRハ距離空間トナル. Rノコノtopologyヲuniformト呼ブ。

Rハuniform topologyニ関シテ完備デアルトハ限ラナイガ, 完備デアレバuniformly completeデアルト云フ。尚, uniformly completeデナケレバCauchyノ方法ニヨッテuniformly completeニスルコトガ出来ル。

A±B, ABハ共ニRノuniform topologyニ関シテA, Bノ連続函数デアリ, αAハα, Aニ関シテ連続デアル。又, |A|ハAノ連続函数デアル。

今，連續性ニ關スルコレ等ノ性質ヲ利用シテ逆要素ノ存在ノ問題ヲ考ヘル．Rヲ代數的單位要素 Eヲ有スル *uniformly complete normed ring* トスル。

補助定理1. $|A|<1$ ノトキニハ $E-A$ ハ代數的逆要素ヲ有スル。

證明． $S_n=\sum_{K=0}^{n} A^K \ (n=1,2,\cdots\cdots)$ トスレバ，$n>m$ ニ對シテ

$$|S_n-S_m|=|A^{m+1}+\cdots\cdots+A^n|$$

$$\leqq |A|^{m+1}+\cdots\cdots+|A|^n \leqq \frac{\rho^{m+1}}{1-\rho}$$

（但シ，$|A|=\rho<1$）デアルカラ，Rノ完備性ヨリ $\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{K=0}^{\infty} A^n$（$=B$ト置ク）が存在スル．然ルニ

$$(E-A)S_n=S_n(E-A)=E-A^{n+1}$$

デアッテ $\lim_{n\to\infty} A^n=0$ デアルカラ $(E-A)B=B(E-A)=E$ 即チ，$E-A$ ハ代數的逆要素ヲ有スル．

$A\in R$が（代數的）正則要素デアルトキ $\Phi(X)=A^{-1}X$ トスレバ，コレハRデ連續デアル．從ッテ Aノ近傍 $\mathfrak{U}(A)$ヲ選ンデ $X\in\mathfrak{U}(A)$ ノ時ニ

$$|\Phi(A)-\Phi(X)|=|E-A^{-1}X|<\rho<1$$

デアルヤウニ出来ル。夫レ故ニ，$E-A^{-1}X=B$ トスレバ $E-B=A^{-1}X$ ハ補助定理ノヨリ（代数的）逆要素ヲ有スル．夫レヲ C トスレバ，$(CA^{-1})X=C(A^{-1}X)=E$ デアル．一方ニテ

$$X(CA^{-1})=A(A^{-1}XC)A^{-1}=E$$

デアルカラ，X ハ（代数的）逆要素ヲ有スル。即チ，A ノ近傍ニアル要素ハ（代数的）正則デアル。

今，R ノ（代数的）正則要素ノ全体ノ作ル集合ヲ $\mathfrak{G}$ トスル．$\mathfrak{G}$ ハ開集合デ、シカモ乗法ニ関シテ群ヲナシテ居ル。

次ニ，$\mathfrak{G}$ デ $\Psi(X)=X^{-1}$ ヲ考ヘヨウ．$X, A\in\mathfrak{G}$ ノ時ニハ

$$\Psi(X)-\Psi(A)=X^{-1}-A^{-1}=(X^{-1}A-E)A^{-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(E-A^{-1}X)^{n}A^{-1}$$

デアルカラ，$|X-A|<P<|A^{-1}|^{-1}$ トスレバ

$$|\Psi(X)-\Psi(A)|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}|E-A^{-1}X|^{n}|A^{-1}|$$

$$\leqq\sum_{n=1}^{\infty}|A^{-1}|^{n+1}|A-X|^{n}<\frac{|A^{-1}|^{2}}{1-|A^{-1}|\rho}\rho$$

トナル．従ッテ $\Psi(X)$ ハ $\mathfrak{G}$ デ連続デアル。以上ノ結果ヲ次ノ様ニ述ベルコトが出来ル。

定理1. Rヲ代数的単位要素ヲ有スル uniformly complete normed ring トスレバ, Rノ代数的正則要素ノ全体ノ作ル集合 $\mathfrak{G}$ ハ Rデ開イテ居テ、シカモ乗法ニ関シテ位相群ヲナシテ居ル。又 X^{-1} ハ $\mathfrak{G}$ ニ於テ連續デアル。(1)

Rノ部分集合 R_0 デ再ビ環ヲナシテ居ルモノヲ Rノ代数的部分環ト呼ビ, 特ニ uniform topology ニ関シテ Rデ閉ヂテ居ルモノヲ Rノ部分環ト呼ブ. uniformly complete normed ring ノ subring ハ又 uniformly complete デアル。

次ニ, 二ツノ normed ring R_K $(K=1,2)$ ヲ考ヘル. R_1 ノ各要素 A_1 ニ R_2 ノ要素 A_2 ヲ對應セシメル寫像デ A_1+B_1 ニハ A_2+B_2 ヲ, A_1B_1 ニハ A_2B_2 ヲ, αA_1 ニハ αA_2 ヲ對應セシメルモノヲ algebraic homomorphism ト云ヒ, 又コノ中デ uniform topology ニ関シテ連續ナルモノヲ uniform homomorphism ト云フ。更ニ, コノ中デ開集合ヲ開集合ニ寫スモノヲ open uniformly homomorphism ト名付ケルコトニスル。

---

(1) M. Nagumo, Einige analytischen Untersuchungen in linearen metrischen Ringen. Japanese Jour of Math. vol. XIII. 1936

又，R_1 ト R_2 トノ間ノ algebraic homomorphism デ一對一對應ノモノヲ algebraic isomorphism ト呼ビ，コレガ uniform topology ニ關シテ両側連續デアレバコノ寫像ヲ uniformly isomorphism ト云フ。スルト，次ノ補助定理ガ成立ツ。

補助定理2. $R_K\ (K=1,2)$ ヲ uniformly complete normed ring トスルトキニ，R_1 ヲ R_2 ニ寫ス algebraic isomorphism $\varphi(t)$ ガ t ニ關シテ連續デアレバ，R_1 ト R_2 トハ uniformly isomorphic デアル。

證明ハ S. Banach ノ定理ニヨリ自明デアルガ有效デアル。

次ニ，R_1 ト R_2 トノ間ノ uniformly isomorphism デ $|A_1|=|A_2|$ ノ成立ツモノヲ isometrically isomorphism ト名付ケル. R_1 ガ uniformly complete ナルトキニ，R_1 ノ isometrically isomorphism ニ關スル像ハ又 uniformly complete デアル。

更ニ，R_1 ヲ夫自身ノ中ニ寫ス algebraic 又ハ uniformly isomorphism ヲ algebraic 又ハ uniformly automorphism ト名付ケル. isometrically automorphism モ同様ニ定義スル. $\mathfrak{U}$ ヲ單位的要素トスルトキニ $\mathfrak{X}$ ヲ $\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{X}\mathfrak{U}$ ニ寫

ス寫像ハ *isometrically automorphism* デアル。

次ニ，R_1 ノ各要素 A_1 ニ R_2 ノ要素 A_2 ヲ對應セシメル寫像デ A_1+B_1 ニハ A_2+B_2 ヲ，A_1B_1 ニハ B_2A_2 ヲ對應セシメルモノヲ *algebraic anti-homomorphism* ト呼ビ，コレガ *uniform topology* ニ關シテ連續デアレバコレヲ *uniformly anti-homomorphism* ト云フコトニスル。同様ニシテ，*anti-isomorphism* 及ビ *anti-automorphism* ヲ定義スル。

今，R ノ上ノ *uniformly anti-automorphism* ヲ考ヘル．R ノ要素 A ニ對應スルモノヲ A^* トスレバ

$$(A+B)^*=A^*+B^* \qquad (AB)^*=B^*A^*$$

デアッテ，A ニ A^{**} ヲ對應セシメル寫像ハ R ノ上ノ *uniformly isomorphism* デアル．此処デ特ニ

$$|A|=|A^*|, \qquad A^{**}=A$$

ノ成立ツトキニ，R ヲ *involuted ring* ト呼ブコトニスル．コノ場合ニ $(\alpha A)^*=\bar{\alpha}A^*$ デアレバ，R ハ *proper* デアルト云ヒ，$(\alpha A)^*=\alpha A^*$ デアレバ，R ハ *improper* デアルトイフコトニショウ。更ニ，此レ等ノ場合ニ $A=A^*$ ヲ滿ス要素 A ヲ *hermitian* ト名

付ケル. $A+A^*$ 及ビ AA^* ノ hermitian デアルコトハ自明デアル.

次ニ R ノ部分集合 $\mathfrak{N}$ デ條件

1°. $A, B \in \mathfrak{N}$ ノトキニ $\alpha A + \beta B \in \mathfrak{N}$ デアル.

2° R ノ任意ノ要素 A ニ對シテ $\mathfrak{N}A \leqq \mathfrak{N}$ デアル.

ヲ滿足スルモノヲ右 algebraic ideal ト云ヒ, 同様ニ左 algebraic ideal, 兩側及ビ片側 algebraic ideal ヲ定義スル. 更ニ, コレ等ノ ideal ノ中デ uniform topology ニ關シテ閉ヂタモノヲ右 ideal, 兩側 ideal 等ノ様ニ algebraic ト云フ形容詞ヲ除イテ呼ブコトニスル。

R ノ右(左又ハ兩側)ノ(algebraic) ideal デ (0) 及ビ R ト異ナリ, 夫レヲ含ム右(左又ハ兩側)ノ(algebraic) ideal ガ R ノミノモノヲ右(左又ハ兩側)ノ最大(algebraic) ideal ト名付ケル。スルト次ノ定理ガ得ラレル。

定理2　R ヲ代數的單位要素ヲ有スル uniformly complete normed ring トスルトキニ, R ノ右(左又ハ兩側)ノ最大 algebraic ideal ハ uniform topology ニ關シテ閉ヂテ居ル. 從ツテ夫レハ R ノ右(左又ハ兩側)ノ最大 ideal デアル。又, R ノ任意ノ右(左又ハ兩側)ノ algebraic ideal ヲ含ム右(左又ハ兩側)ノ最大 ideal ガ存在スル。

証明．$\mathfrak{N}$ヲRノ右ノ最大 *ideal* トスルトキニハRノ代数的正則要素ノ全体カラナル集合$\mathfrak{G}$ニ対シテ$\mathfrak{N} \subseteqq R-\mathfrak{G}$デアル。トコロデ，定理1ヨリ$R-\mathfrak{G}$ハ *uniform topology* ニ関シテ閉ヂテ居ルカラ，$\mathfrak{N}$ノ *uniform topology* ニ関スル閉被$\overline{\mathfrak{N}}$ハ$R-\mathfrak{G}$ニ含マレ，従ッテ$\overline{\mathfrak{N}} \neq R$デアル。

然ルニ、$\overline{\mathfrak{N}}$ハ右ノ *ideal* デアル。何トナレバ，$\mathfrak{N}$ハRニ於イテ *linear* デアルカラ$\overline{\mathfrak{N}}$モ亦Rニ於イテ *linear* デアル。次ニ，$A \in R$ニ対シテ$B \in \overline{\mathfrak{N}}$ヲ考ヘル．$B \in \mathfrak{N}$デアレバ，$BA \in \mathfrak{N} \subseteqq \overline{\mathfrak{N}}$トナル。$B \in \overline{\mathfrak{N}}-\mathfrak{N}$デアレバ，$B_n \in \mathfrak{N}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ヲ求メテ$B_n \to B$ *uniformly* ト出来ル。従ッテ，$B_n A \to BA$ *uniformly* ガ得ラレ$BA \in \overline{\mathfrak{N}}$デアル。即チ，$\overline{\mathfrak{N}}$ハ右ノ *ideal* デアル。

此処デ$\mathfrak{N} \subseteqq \overline{\mathfrak{N}} \neq R$デアルカラ，$\mathfrak{N}$ノ最大性ヨリ$\mathfrak{N}=\overline{\mathfrak{N}}$トナル。即チ，$\mathfrak{N}$ハ *uniform topology* ニ関シテ閉ヂテ居ル．左及ビ両側ノ最大 *ideal* ニツイテモ同様デアル。

次ニ，右（左又ハ両側）ノ *algebraic ideal* ヲ含ム右（左又ハ両側）ノ最大 *ideal* ノ存在ハRノ連続性ニ関係ナク代数的ニ証明サレルカラ，此処デハ夫レヲ省ク。

（証明完了）

今，最大 *ideal* ノ一ツヲ利用シテ正則要素ノ存

左ニ關スル次ノ系ヲ擧ヘテ置カウ。

系. Rヲ（代數的）單位要素ヲ有スル uniformly complete normed ring トスルトキニ, $A\in R$ ガ（代數的）正則要素デアルガタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ A ガ右及ビ左ノ最大 ideal ニ含マレナイコトデアル。

次ニ, $\mathfrak{N}$ヲRノ兩側 ideal トスルトキニ, $A-B\in\mathfrak{N}$ デアレバ $A\equiv B\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{N})$ ト書キ A, B ハ$\mathfrak{N}$ヲ法トシテ合同デアルト云フ。スルト, $A\equiv A',\ B\equiv B'\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{N})$ ヨリ $A+B\equiv A'+B'$, $AB\equiv A'B'\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{N})$ ガ得ラレル。又, $\mathfrak{N}$ヲ法トシテ A ト合同ナル要素ノ集合ハ uniform topology ニ關シテ閉ヂテ居ルガ、コレヲ$\mathfrak{N}$ヲ法トスル剩餘類ト呼ビ $\mathfrak{K}_A$ ニテ示ス。其處デ

$$|\mathfrak{K}_A| = \inf_{X\in\mathfrak{K}_A} |X|$$

トスレバ, 次ノコトガ云ハレル。

1° $|\mathfrak{K}_A| \leqq |A|$

2° $|\alpha\,\mathfrak{K}_A| = |\alpha|\,|\mathfrak{K}_A|$

3° $$|\mathfrak{K}_A+\mathfrak{K}_B| = \inf_{X\in\mathfrak{K}_A+\mathfrak{K}_B}|X| = \inf_{Y\in\mathfrak{K}_A,\,Z\in\mathfrak{K}_B}|Y+Z|$$

$$\leqq \inf_{Y\in\mathfrak{K}_A}|Y| + \inf_{Z\in\mathfrak{K}_B}|Z| = |\mathfrak{K}_A| + |\mathfrak{K}_B|$$

4° $|\mathfrak{R}_A\mathfrak{R}_B| = \inf\limits_{X\in\mathfrak{R}_A\mathfrak{R}_B}|X| = \inf\limits_{Y\in\mathfrak{R}_A,\, Z\in\mathfrak{R}_B}|YZ|$

$$\leqq \inf_{Y\in\mathfrak{R}_A}|Y| \inf_{Z\in\mathfrak{R}_B}|Z| = |\mathfrak{R}_A||\mathfrak{R}_B|$$

5° $|\mathfrak{R}_A| = 0$ トスレバ, $X_n\in\mathfrak{R}_A$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$,

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0$$

ヲ満ス X_n ガ存在スル。然ルニ, $X\in\mathfrak{R}_A$ ニ對シテ $X - X_n \in \mathfrak{I}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ デアルカラ $\lim\limits_{n\to\infty}(X-X_n) = X$ ハ $\mathfrak{I}$ ニ含マレ $\mathfrak{R}_A=\mathfrak{I}$ ガ得ラレル。

1°—5° ヨリ剰餘類ノ全体ノ作ル集合ハ再ビ normed ring ヲナスコトガ判ル. コレヲ R ノ $\mathfrak{I}$ ヲ法トスル剰餘類環ト云ヒ, $R/\mathfrak{I}$ デ示ス. 此ノ環ニ就イテ更ニ次ノコトガ成立スル。

6° R ガ單位要素 E ヲ有ストキニハ, $\mathfrak{R}_E$ ハ $R/\mathfrak{I}$ ノ單位要素デアル。

何トナレバ, $\mathfrak{R}_E$ ハ $R/\mathfrak{I}$ ノ代數的單位要素デアルカラ $|\mathfrak{R}_E| \geqq 1$ ガ得ラレル。トコロデ, 1° ニ依ッテ $|\mathfrak{R}_E| \leqq |E| = 1$ デアルカラ $|\mathfrak{R}_E| = 1$ ガ成立ツ。即チ $\mathfrak{R}_E$ ハ $R/\mathfrak{I}$ ノ單位要素デアル。

7° R ガ uniformly complete デアレバ, $R/\mathfrak{I}$ ハ又サウデアル。

証明. $\{\mathfrak{K}_{A_n}\}$ ($n=1,2,\cdots\cdots$) ヲ考ヘル. $\varepsilon>0$ ニ對シテ N ヲ選ンデ $n, m \geqq N$ ノ時ニ

$$|\mathfrak{K}_{A_n}-\mathfrak{K}_{A_m}|<\varepsilon$$

デアル様ニナシ得タトスル. スルト, 部分列 $\{\mathfrak{K}_{B_n}\}$ ($n=1,2,\cdots\cdots$) ヲ選ンデ $\sum_{n=1}^{\infty}|\mathfrak{K}_{B_n}-\mathfrak{K}_{B_{n+1}}|<+\infty$ ト出来ル. トコロデ, $X_1 \in \mathfrak{K}_{B_1}$ ニ對シテ $X_2 \in \mathfrak{K}_{B_2}$ ヲ選ンデ

$$|X_1-X_2| \leqq 2|\mathfrak{K}_{B_1}-\mathfrak{K}_{B_2}|$$

ト出来ル. 同様ニ $X_3 \in \mathfrak{K}_{B_3}$ ヲ定メテ

$$|X_2-X_3| \leqq 2|\mathfrak{K}_{B_2}-\mathfrak{K}_{B_3}|$$

ト出来ル. コノヤウニシテ $\{X_n\}$ ($n=1,2,\cdots\cdots$) ヲ決定スレバ, $\sum_{n=1}^{\infty}|X_n-X_{n+1}| \leqq 2\sum_{n=1}^{\infty}|\mathfrak{K}_{B_n}-\mathfrak{K}_{B_{n+1}}|<+\infty$ デアルカラ, $\{X_n\}$ ($n=1,2,\cdots\cdots$) ハ Cauchy 列デアル. 従ッテ假定ヨリ $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ ガ存在スル. トコロデ, X ノ属スル剩餘類 $\mathfrak{K}_X$ ニ對シテ $\lim_{n\to\infty}\mathfrak{K}_{B_n}=\mathfrak{K}_X$ ガ得ラレ, 又 $\lim_{n\to\infty}\mathfrak{K}_{A_n}=\mathfrak{K}_X$ トナル. (證明完了)

今, R ト $R/\mathfrak{n}$ トノ關係ヲ考ヘルタメニ R_1 ヲ R_2 ノ中ニ寫ス open uniformly homomorphism $\varphi(t)$ ヲ取ル. R_1 ノ要素 X デ $\varphi(X)=0$ ヲ満足スルモノカラナル集合ヲ $\mathfrak{n}$ トスレバ, $\mathfrak{n}$ ハ R_1 ノ両側 ideal デアル. 其処デ, $\mathfrak{n}$ ヲ法トスル R_1 ノ剩餘類 $\mathfrak{K}_A$ ト R_2 ノ要素 $\varphi(A)$

トヲ對應セシメルト，$R_1/\mathfrak{N}$ ト $\varphi(R_1)$ トノ間ノ代數的同型寫像ガ得ラレル．今，コレガ兩側連續ナルコトヲ示サウ．$\varphi(t)$ ハ連續デアルカラ，$A \in R_1$ ト $\varepsilon > 0$ トニ對シテ $\delta > 0$ ヲ求メテ $|A - X| < \delta$ ノトキニ $|\varphi(A) - \varphi(X)| < \varepsilon$ トナシ得ル．然ルニ，$|A - X| < \delta$ ノトキニハ $|\mathfrak{N}_A - \mathfrak{N}_X| < \delta$ デアッテ，シカモ逆ニ $|\mathfrak{N}_A - \mathfrak{N}_X| < \delta$ ノトキニハ $|A - X'| < \delta$ ヲ滿ス X' ガ $\mathfrak{N}_X$ ニ含マレ $\mathfrak{N}_{X'} = \mathfrak{N}_X$ デアル．夫レ故ニ $\mathfrak{N}_A = \varphi(A)$ ヲ對應セシメル寫像ハ連續デアル。

次ニ，$\varphi(A)$ ハ open デアルカラ，$A \in R_1$ ト $\varepsilon > 0$ トニ對シテ $|A - X| < \varepsilon$ ヲミタス X ノ集合ノ $\varphi(t)$ ニ關スル像ハ R_2 デ open デアル．從ッテ $\delta > 0$ ヲ求メテ $|\varphi(A) - \varphi(X)| < \delta$ ヲ滿タス $\varphi(X)$ ガ今考ヘタ像集合ニ含マレルヤウニ出來ル．夫レ故ニ $|\varphi(A) - \varphi(X)| < \delta$ ノトキニハ $\varphi(X)$ ノ原像 X デ $|A - X| < \varepsilon$ ヲ滿スモノガアル．トコロデ $|A - X| < \varepsilon$ ノトキニ $|\mathfrak{N}_A - \mathfrak{N}_X| < \varepsilon$ デアルカラ，$\varphi(A)$ ヲ $\mathfrak{N}_A$ ニ寫ス寫像モ亦連續デアル．從ッテ $R_1/\mathfrak{N}$ ト $\varphi(R_1)$ トハ *uniformly isomorphic* デアル．即チ

定理 3. *Normed ring* R_1 ヲ R_2 ノ中ニ寫ス *open uniform homomorphism* $\varphi(t)$ ニ對シテ $\varphi(X) = 0$ ヲ滿ス X ノ集合ヲ $\mathfrak{N}$ トスレバ，$\mathfrak{N}$ ハ R_1 ノ兩側 *ideal* デアッテ，$R_1/\mathfrak{N}$ ハ $\varphi(R_1)$ ト *uniformly isomorphic* デアル。

トコロデ、R_K ($K=1,2$) ガ共ニ uniformly complete ノトキニハ定理3ニ於ケル $\varphi(t)$ ノ條件ヲ uniform homomorphism デ置キ換ヘ得ル。卽チ

定理4. R_K ($K=1,2$) ヲ uniformly complete normed ring トスルトキニ、R_1 ヲ R_2 ノ上ニ寫ス uniformly homomorphism $\varphi(t)$ ニ對シテ $\varphi(\mathfrak{X})=0$ ヲ滿ス $\mathfrak{X}$ ノ集合ヲ $\mathfrak{R}$ トスレバ、$\mathfrak{R}$ ハ R_1 ノ兩側 ideal デアッテ、$R_1/\mathfrak{R}$ ハ $\varphi(R_1)$ ト uniformly isomorphic デアル。

此ノ定理ノ證明ハ補助定理2ヲ利用スレバヨイ。

次ニ、R デ 0. R 以外ニ右 (左又ハ兩側) ideal ヲ含マナイモノヲ右 (左又ハ兩側) 單純ト呼ブ。右 (左又ハ兩側) 單純 ideal モ同樣ニ定義スル。スルト、次ノ定理ガ得ラレル。

定理5. $\mathfrak{R}$ ヲ normed ring R ノ兩側最大 ideal トスレバ、$R/\mathfrak{R}$ ハ兩側單純デアル。

證明. $R/\mathfrak{R}$ ガ兩側單純デナケレバ、コレハ 0, $R/\mathfrak{R}$ ト異ナル兩側 ideal ヲ含ム. 其ノ一ツヲ $\mathfrak{M}$ トスルトキニ、R ノ要素 A デ $\mathfrak{R}$ ヲ法トスル R ノ剩餘類 $\mathfrak{K}_A$ ガ $\mathfrak{M}$ ニ含マレルヤウナモノカラナル集合ヲ $\mathfrak{J}$ トスレバ、$\mathfrak{R}<\mathfrak{J}<R$ デアル。トコロデ、$\mathfrak{J}$ ハ R ノ兩側 ideal デアル、卽チ、$A\in\mathfrak{J}$. $B\in R$ ノトキニ $\mathfrak{K}_A\mathfrak{K}_B=\mathfrak{K}_{AB}$,

$\mathfrak{R}_B\mathfrak{R}_A=\mathfrak{R}_{BA}$ ハ共ニ$\mathfrak{N}$ニ含マレルカラ、AB, BA ハ共ニ$\mathfrak{J}$ニ含マレ、$\mathfrak{J}$ハ両側 *algebraic ideal* デアルガ、更ニ$\mathfrak{J}$ハRニ於イテ *uniform topology* ニ関シテ閉デテ居ル。何トナレバ、$A \to \mathfrak{R}_A$ ノ写像ハ *uniform topology* ニ関シテ連続デ、シカモ$\mathfrak{N}$ハ$R/\mathfrak{N}$ニ於イテ *uniformly closed* デアルカラデアル。コレハ$\mathfrak{N}$ノ定義ニ矛盾スル。夫レ故ニ$R/\mathfrak{N}$ハ両側単純デアル。

(証明完了)

今、*normed ring* R ノ凡テノ両側最大 *ideal* ノ共通部分ヲソノ根基ト呼ビ、夫レガ0デアルモノヲ準単純ト呼ブコトニスル。$\mathfrak{N}$ヲRノ両側最大 *ideal* トスレバ定理5ニヨッテ$R/\mathfrak{N}$ハ両側単純デアル。其処デ、此様ナ両側単純環ノ集合ヲ$\mathfrak{N}$トシ、A（∈R）ノ含マレル$R/\mathfrak{N}$ノ剰余類ヲ$A_{\mathfrak{N}}$デ示スコトニスル。スルト、Rノ各要素Aニハ$\mathfrak{N}$ニテ定義セラレ、$R/\mathfrak{N}$デ$A_{\mathfrak{N}}$ヲ値トスル函数——Θ_Aニテ示ス——ガ対応スル。其処デΘ_Aノ全体カラナル集合ヲ$\mathcal{R}$トシ、Θ_Aノ絶対値$|\Theta_A|$ヲ

$$|\Theta_A| = \sup_{\mathfrak{N}} |A_{\mathfrak{N}}|$$

デ示セバ、$\mathcal{R}$ハ *normed ring* トナル。トコロデ

$$\Theta_A \pm \Theta_B = \Theta_{A\pm B}, \quad \Theta_A\Theta_B = \Theta_{AB}, \quad \alpha\Theta_A = \Theta_{\alpha A}$$

ガ成立チ、シカモRノ準単純性ヨリAトΘ_Aトノ対応ハ一対一デアル。即チ、Rト$\mathcal{R}$トハ代数的同型デアル。コレガ準

單純環ノ兩側單純環ノ直和ヘノ分解デアルガ、此處デ種々ノ問題ガ起ル、例ヘバ $A \longleftrightarrow H_A$ ノ對應ノ連續性ノ問題ガアル. R ガ uniformly complete デアレバ，此ノ對應ハ uniformly isomorphism トナルガ、一般ノ場合ハドウデアラウカ。又 $\mathfrak{A}$ ニハ如何ナル topology ヲ導入スベキデアルカ。更ニ半單純性ト兩側完全可約性トノ關係ハドウデアラウカ。

（西大二三六八）